

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.

Mathematisk-fysiske Meddelelser. **IX**, 7.

---

PERIODISCHE BAHNEN UM  
 $L_4$  (BEZW.  $L_5$ ) IM PROBLÈME RESTREINT  
BEI BELIEBIGEM VERHÄLTNIS DER ZWEI  
ENDLICHEN MASSEN.

EINE VORLÄUFIGE MITTEILUNG

VON

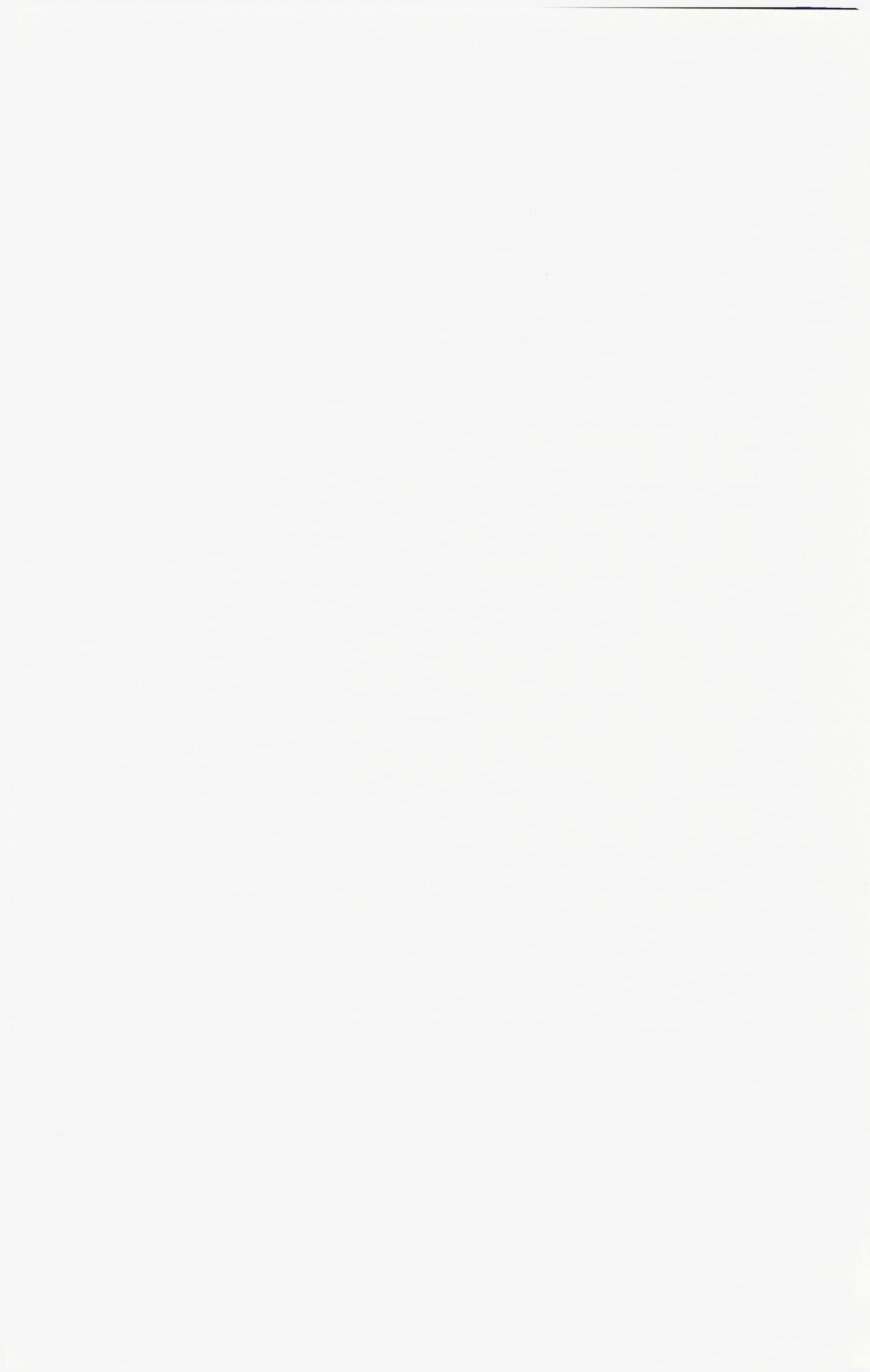
ELIS STRÖMGREN



KØBENHAVN

HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL  
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI

1929



Die unendlich grosse Zahl von Klassen periodischer Bahnen im problème restreint, die dadurch entstehen, dass die dritte (unendlich kleine) Masse erst nach mehr als einem Umlauf ihre Bewegung in derselben Bahn wiederholt, liegen ausserhalb des Rahmens der Kopenhagener Untersuchungen.

Sobald eine Bahnklasse aber in bezug auf die eine endliche Masse, oder auf beide Massen, oder auf einen Librationspunkt, oder auf zwei Librationspunkte einfach-periodisch verläuft — während der ganzen Entwicklung der Klasse oder während eines Teiles derselben — gehört sie zu unserem Programm.

Bis vor kurzem gab es nun in unserer Übersicht über das System einfach-periodischer Bahnen zwei Lücken: erstens die Frage von der Weiterentwicklung der direkten periodischen Bahnen um eine der zwei endlichen Massen bis zu einem natürlichen Abschluss, und zweitens die Frage, ob es für alle Massenverhältnisse der zwei endlichen Massen periodische Bahnen um den Librationspunkt  $L_4$  (bezw.  $L_5$ ) gibt.

Das erstere der zwei erwähnten Probleme soll in einer folgenden Abhandlung behandelt werden, das letztere ist Gegenstand der jetzt vorliegenden Arbeit.

---

Seit lange war es bekannt, dass es für jedes beliebige Verhältnis der zwei endlichen Massen infinitesimale periodische Bahnen um die drei Librationspunkte  $L_1$ ,  $L_2$  und  $L_3$

gibt, deren Entwicklung sich auf endliche Entfernungen von diesen Librationspunkten verfolgen liess. In bezug auf die Librationspunkte  $L_4$  und  $L_5$  lagen aber die Verhältnisse so, dass es zwar unter besonderen Bedingungen (die eine endliche Masse kleiner als etwa  $1/25$  der anderen) infinitesimale periodische Lösungen um jeden dieser zwei Librationspunkte gibt, dass es aber für alle anderen Massenverhältnisse in bezug auf jeden dieser zwei Librationspunkte wohl spiralförmige, asymptotische Bahnen gibt, aber keine infinitesimalen rein periodischen Lösungen. Die spiralförmigen asymptotischen Lösungen bilden in unserem Problem ein Hauptproblem, seitdem es sich gezeigt hat (Publ. Kopenh. 47, 60 und 61), dass diese Lösungen den Schlüssel zu der Frage von dem Abschluss der allermeisten Klassen periodischer Bahnen in dem Problem abgibt.

Das Problem, ob es endliche periodische Lösungen um  $L_4$  und  $L_5$  gibt, ist ein paarmal in der Literatur gestreift worden. In seiner Arbeit »Periodic Orbits« behauptet MOULTON, eine Anzahl solcher Bahnen berechnet zu haben, und er gibt auch numerische Resultate für 5 solche Bahnen. Seine Zahlen waren aber nicht überzeugend, da keine der 5 gerechneten Bahnen das Jacobische Integral befriedigte (bei zwei von den Bahnen fängt die Bewegung sogar im verbotenen Gebiet an, wenn man mit den von MOULTON gegebenen Zahlen rechnet). Die Frage musste deshalb als unentschieden bezeichnet werden.

Seitdem die Zusammenstellung der zu  $L_4$  (bezw.  $L_5$ ) asymptotischen Bahnen (Publ. Kopenh. 61 und Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab, Mathematisk-fysiske Meddelelser, IX, 3) vorliegt, ist es nun aber leicht, zu zeigen, dass das System asymptotischer Bahnen, das schon vorher für die Systematik der periodischen Bahnen im problème



restreint so viel geleistet hat, auch die Lösung der jetzt besprochenen Frage in einfachster Weise in nuce enthält und ausserdem noch eine Fülle von anderen Anregungen zu geben, im Stande ist. Wir wollen im folgenden eine Reihe Probleme angeben, die sich ohne weiteres bei einer einfachen Betrachtung der Tafel in Publ. 61 zur Diskussion stellen.

I. Unter den zu  $L_4$  asymptotischen Bahnen, die auf der erwähnten Tafel dargestellt sind, befinden sich zwei, No. 8 ( $\eta_0 = +1.705$ ) und 9 ( $\eta_0 = +1.700$ ), die nach einem halben Umlauf die  $\eta$ -Achse unter einem schiefen Winkel schneiden, und zwar die erstere auf dem Wege abwärts und die letztere auf dem Wege aufwärts. Zwischen diesen zwei Bahnen — also für einen Wert von  $\eta_0$ , der zwischen  $+1.705$  und  $+1.700$  liegt — muss es eine zu  $L_4$  asymptotische Bahn geben, die die  $\eta$ -Achse senkrecht schneidet, eine Bahn also, die periodisch verlaufen wird, indem sie links von der  $\eta$ -Achse wieder, ganz symmetrisch zum ersten Teil, hinaufwandert und schliesslich spiralförmig-asymptotisch in  $L_4$  hineingleitet. Wir haben hier also eine asymptotisch-periodische Bahn, die nur den Librationspunkt  $L_4$  — nicht  $L_5$  — berührt und in bezug auf die  $\xi$ -Achse unsymmetrisch ist. Ganz analog haben wir selbstverständlich eine entsprechende Bahn in bezug auf  $L_5$  (Spiegelbild der vorigen Bahn). Der Einfachheit wegen beschränken wir uns hier auf die zu  $L_4$  asymptotische Bahn. Alle Schlüsse können sich unmittelbar auf den Librationspunkt  $L_5$  direkt übertragen.

Was nun diese periodische, zu  $L_4$  asymptotische, um die  $\xi$ -Achse unsymmetrische Bahn für Stellung hat im ganzen System periodischer Bahnen, geht ohne jede Rechnung aus den allgemeinen Überlegungen in der Publika-

tion 61 hervor: Es kann keinem Zweifel unterliegen, dass diese Bahn als Grenzbahn einer Klasse periodischer Bahnen aufzufassen ist, die, symmetrisch in bezug auf die  $\eta$ -Achse, aber unsymmetrisch in bezug auf die  $\xi$ -Achse, um  $L_4$  laufen. Diejenigen unter diesen Bahnen, die in die Nähe von  $L_4$  kommen, weisen oben Einbuchtungen, bezw. Spitzen und Schleifen auf, ganz wie in der Entwicklung der Klassen  $k$ ,  $l$  u. s. w. (S. z. B. Publ. Kopenh. 47). Die graziöse Form der rein periodischen Bahn und der ihr am nächsten liegenden periodischen, nicht-asymptotischen Bahnen geht mit Leichtigkeit schon aus der Tafel in Publ. 61 hervor.

II. Auf der Tafel in Publ. 61 finden wir ferner die Bahn 12 ( $\eta_0 = +1.737$ ), die angenähert senkrecht auf die  $\eta$ -Achse, aber doch unter einem etwas schiefen Winkel, diese Achse — auf dem Wege aufwärts — schneidet. Ein Blick auf die Tafel liess vermuten, dass es Bahnen geben wird, mit  $\eta_0$ -Werten etwas grösser als  $+1.737$ , die die  $\eta$ -Achse auf dem Wege abwärts unter schrägem Winkel schneiden, und eine Bahn, die die  $\eta$ -Achse unter einem Winkel von  $90^\circ$  schneidet. Auf meinen Wunsch hat Herr Lektor BENNEDSEN die Bahn No. 13 ( $\eta_0 = +1.738$ ) auf der Tafel in Publ. 61 bis zum Schnitt mit der  $\eta$ -Achse fortgesetzt. Der Verlauf dieser Bahn bestätigte meine Vermutung, und damit ist die Existenz einer zweiten zu  $L_4$  asymptotischen, in bezug auf die  $\xi$ -Achse unsymmetrischen, periodischen Bahn sichergestellt. Auf diese Bahn werde ich in einer späteren Abhandlung zurückkommen. Es kann keinem Zweifel unterliegen, dass sie als Grenzbahn einer Klasse periodischer Bahnen um  $L_4$  aufzufassen ist.

III. Die Existenz noch einer dritten, zu  $L_4$  — aber nicht zu  $L_5$  — asymptotischen, periodischen Bahn schien durch die Tafel in Publ. 61 angedeutet zu sein: eine Bahn mit



$\eta_0$  etwas grösser als  $+1.750$ , die die  $\eta$ -Achse nach einem halben Umlauf unten senkrecht schneidet, und die dann symmetrisch um die  $\eta$ -Achse aufwärts verläuft, um schliesslich in  $L_4$  asymptotisch von links hineinzuwandern. Um diese Bahn sicherzustellen, habe ich Herrn BENNEDSEN gebeten, die asymptotische Bahn  $\eta_0 = +1.752$  zu rechnen. Die Vermutung wurde bestätigt: die neue Bahn schneidet die  $\eta$ -Achse auf dem Wege nach unten, und damit ist die Existenz einer Bahn ( $1.750 < \eta_0 < 1.752$ ), die die  $\eta$ -Achse senkrecht schneidet, gesichert. Die nähere Untersuchung dieser Bahn und derjenigen Klasse Bahnen, zu der sie die eine Grenzbahn ist, wird in einer späteren Abhandlung erfolgen.

IV. Wir haben oben von den MOULTONschen Resultaten über eine Klasse periodischer Bahnen um  $L_4$  (bezw.  $L_5$ ) gesprochen und erwähnt, dass die in den »Periodic Orbits« gegebenen numerischen Werte in keinem der 5 Fälle dem Jacobischen Integral genügen, und dass deshalb die Schlüsse, zu denen MOULTON gekommen war, nicht überzeugend wirken konnten.

Mit Hilfe unseres Systems asymptotischer Bahnen ist es nun in der Tat möglich, mit relativer Leichtigkeit festzustellen, ob eine Bahnklasse, die der von MOULTON angedeuteten ähnlich ist, wirklich existiert, oder nicht. Auf der Tafel in Publ. 61 gab es Anzeichen dafür, dass — etwa in der Nähe der Bahn No. 19 ( $\eta_0 = +1.745$ ) — eine zu  $L_4$  asymptotische Bahn existieren könnte, die, nachdem sie die  $\xi$ -Achse zum zweiten Mal (diesmal in der Bewegung aufwärts) geschnitten hat, nachher um die Masse  $m_2$  nach links umbiegt und dann die  $\eta$ -Achse senkrecht schneidet. Wenn eine solche Bahn existiert, ist sie sicher die Grenzbahn einer Klasse periodischer Bahnen um  $L_4$ , Bahnen mit

im grossen ganzen derselben Form wie die asymptotische Bahn selber, in der Nachbarschaft von  $L_4$  mit Einbuchtungen, Spitzen, Schleifen . . . Herr BENNEDSEN hat nun auf meinen Wunsch die Bahn  $\eta_0 = +1.745$  (Publ. 61) fortgesetzt. Seine Resultate (Bahn 3 der vorliegenden Abhandlung) lassen nun in der Tat die Existenz der gesuchten periodischen asymptotischen Bahn als wahrscheinlich erscheinen und scheinen anzugeben, dass eine solche Bahn gerade in der Nähe von der Bahn  $\eta_0 = +1.745$  liegen wird.

V. In ganz entsprechender Weise sieht es auf der Tafel in Publ. 61 so aus, als ob nicht weit von der Bahn No. 1 ( $\eta_0 = +1.72$ ) eine zu  $L_4$  asymptotische Bahn existieren könnte, die, nach zweimaligem Schnitt mit der  $\xi$ -Achse, oberhalb der  $\xi$ -Achse nach rechts umbiegt und die  $\eta$ -Achse unter rechtem Winkel schneidet. Wenn diese Bahn existiert, wird sie auch zweifellos Grenzbahn einer Klasse in bezug auf die  $\xi$ -Achse unsymmetrischer, periodischer Bahnen um  $L_4$  bilden.

VI. Aus den Verhältnissen auf der Tafel in Publ. 61 geht hervor, dass es zwischen den Bahnen  $\eta_0 = +1.738$  und  $\eta_0 + 1.740$  wieder eine periodische asymptotische Bahn geben muss — natürlich mit zugehörigen periodischen Nachbarbahnen.

---

Nachdem diese Überlegungen nun u. A. zu dem Resultate geführt hatten, dass es nicht unwahrscheinlich ist, dass die in IV besprochenen Bahnen existieren, forderte ich Herrn Assistent MÖLLER auf, die erwähnten Resultate von MOULTON näher zu untersuchen, weil die im Paragraphen IV angedeuteten Bahnen, wenn sie existieren, eine grosse Ähnlichkeit mit den MOULTONSCHEN Bahnen haben müssen. Herr MÖLLER hat den von MOULTON begangenen Fehler heraus-



gefunden: Die MOULTONSchen Bahnen scheinen tatsächlich zu existieren, in der MOULTONSchen Arbeit ist aber bei allen 5 in Frage kommenden Bahnen ein unrichtiger Wert von  $C$  (der Jacobischen Konstante in der MOULTONSchen Bezeichnung) in der Überschrift angegeben, wodurch das Jacobische Integral versagen musste.

Die nähere Untersuchung der Verhältnisse dieser Bahnen bleibt einer späteren Abhandlung vorbehalten.

---

Im folgenden werden die neuen Rechnungsergebnisse zusammengestellt.

*Universitätssternwarte, Kopenhagen. Ende Mai 1929.*

ELIS STRÖMGREN.

---

## Bahn 1.

$$\eta_0 = +1.738$$

(Forts. zu Publ. 61).

$\psi$	$E$	$F$	$\xi$	$\eta$
0.52	+ 0.61356	+ 0.11004	+ 0.8225	— 0.0635
0.56	0.59802	0.25099	0.8526	0.1428
0.60	0.57890	0.39158	0.9020	0.2196
0.64	0.55724	0.53136	0.9714	0.2944
0.68	0.53460	0.66975	1.0608	0.3673
0.72	0.51322	0.80600	1.1698	0.4400
0.76	0.49600	0.93921	1.2968	0.5156
0.80	0.48654	1.06829	1.4382	0.6001
0.84	0.48912	1.19201	1.5877	0.7025
0.88	0.50848	1.30908	1.7351	0.8356
0.92	0.54955	1.41823	1.8641	1.0153
0.96	0.61701	1.51833	1.9508	1.2572
1.00	0.71484	1.60842	1.9646	1.5714
1.02	0.77608	1.64946	1.9256	1.7555
1.04	0.84586	1.68772	1.8540	1.9544
1.06	0.92428	1.72306	1.7410	2.1644
1.08	1.01135	1.75540	1.5812	2.3786
1.10	1.10692	1.78454	1.3701	2.5886
1.12	1.21072	1.81026	1.1056	2.7835
1.14	1.32224	1.83232	0.7882	2.9506
1.16	1.44084	1.85038	0.4224	3.0763
1.18	1.56556	1.86410	+ 0.0173	3.1475
1.20	1.69522	1.87310	— 0.4134	3.1529
1.22	1.82834	1.87708	0.8517	3.0855
1.24	+ 1.96324	+ 1.87576	— 1.2772	— 2.9441

Bahn 2.

$$\eta_0 = +1.752$$

$t$	$\xi$	$\eta$	$t$	$\xi$	$\eta$
0.0	0.00000	+ 1.75200	5.8	- 0.86101	+ 2.17084
0.2	+ 0.00570	1.75504	6.0	0.79647	2.37048
0.4	0.01270	1.75759	6.2	0.67198	2.58471
0.6	0.02095	1.75937	6.4	0.48124	2.80186
0.8	0.03034	1.76006	6.6	- 0.22058	3.00731
1.0	0.04062	1.75928	6.8	+ 0.11010	3.18447
1.2	0.05144	1.75668	7.0	0.50703	3.31572
1.4	0.06233	1.75190	7.2	0.96192	3.38361
1.6	0.07266	1.74460	7.4	1.46211	3.37203
1.8	0.08168	1.73446	7.6	1.99076	3.26756
2.0	0.08847	1.72128	7.8	2.52753	3.06049
2.2	0.09202	1.70494	8.0	3.04948	2.74593
2.4	0.09117	1.68549	8.2	3.53228	2.32442
2.6	0.08473	1.66312	8.4	3.95171	1.80237
2.8	0.07144	1.63826	8.6	4.28514	1.19191
3.0	0.05002	1.61162	8.8	4.51300	+ 0.51040
3.2	+ 0.01936	1.58420	9.0	4.61998	- 0.22055
3.4	- 0.02162	1.55730	9.2	4.59598	0.97635
3.6	0.07372	1.53274	9.4	4.43646	1.73072
3.8	0.13742	1.51252	9.6	4.14267	2.45710
4.0	0.21276	1.49910	9.8	3.72109	3.12998
4.2	0.29908	1.49520	10.0	3.18325	3.72569
4.4	0.39466	1.50372	10.2	2.54492	4.22352
4.6	0.49644	1.52778	10.4	1.82538	4.60619
4.8	0.59965	1.57063	10.6	1.04677	4.86042
5.0	0.69766	1.63575	10.8	+ 0.23315	4.97729
5.2	0.78234	1.72650	11.0	- 0.59013	4.95240
5.4	0.84435	1.84566	11.2	1.39737	4.78611
5.6	- 0.87386	+ 1.99430	11.4	- 2.16324	- 4.48347



## Bahn 3.

$$\eta_0 = +1.745$$

(Forts. zu Publ. 61).

$\psi$	$E$	$F$	$\xi$	$\eta$
0.00	+ 0.66060	+ 1.52342	+ 1.89743	— 1.34068
0.02	0.68832	1.47130	1.77036	1.31025
0.04	0.70416	1.41892	1.66706	1.25941
0.06	0.70908	1.36690	1.58547	1.19428
0.08	0.70402	1.31576	1.52289	1.11959
0.10	0.68993	1.26592	1.47637	1.03887
0.12	0.66768	1.21770	1.44305	0.95461
0.14	0.63812	1.17135	1.42021	0.86862
0.16	0.60198	1.12700	1.40543	0.78213
0.18	0.56001	1.08472	1.39652	0.69604
0.20	0.51283	1.04454	1.39153	0.61091
0.22	0.46104	1.00640	1.38873	0.52722
0.24	0.40521	0.97022	1.38657	0.44536
0.26	0.34588	0.93586	1.38372	0.36566
0.28	0.28352	0.90321	1.37905	0.28844
0.30	0.21861	0.87210	1.37156	0.21405
0.32	0.15160	0.84239	1.36051	0.14282
0.34	0.08294	0.81392	1.34529	0.07513
0.36	+ 0.01301	0.78656	1.32551	— 0.01132
0.38	— 0.05778	0.76022	1.30099	+ 0.04825
0.40	0.12908	0.73478	1.27165	0.10332
0.44	0.27178	0.68654	1.19936	0.19913
0.48	0.41266	0.64174	1.11125	0.27540
0.52	0.54968	0.60074	1.01125	0.33305
0.56	0.68134	0.56410	0.90362	0.37443
0.60	0.80664	0.53250	0.79237	0.40287
0.64	0.92508	0.50656	0.68064	0.42210
0.68	1.03656	0.48678	0.57072	0.43570
0.72	— 1.14134	+ 0.47346	+ 0.46394	+ 0.44674

$\psi$	$E$	$F$	$\xi$	$\eta$
0.76	— 1.23992	+ 0.46678	+ 0.36091	+ 0.45767
0.80	1.33302	0.46672	0.26166	0.47024
0.84	1.42147	0.47320	0.16575	0.48559
0.88	1.50616	0.48605	+ 0.07237	0.50436
0.92	1.58802	0.50509	— 0.01946	0.52676
0.96	1.66794	0.53014	0.11095	0.55271
1.00	1.74681	0.56099	0.20340	0.58176
1.04	— 1.82542	+ 0.59747	— 0.29819	+ 0.61323

